BLOQUE II: ÁLGEBRA LINEAL.

TEMA 5
INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS VECTORIALES

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1 Dados los vectores de $\mathbb{R}^3$ $\vec{u} = (4, -1, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, -3)$, expresar, si se puede, los siguientes vectores como combinación lineal de ellos.

a) $\vec{w} = (14, 1, -9)$

b) $\vec{w} = (0, 3, -6)$

c) $\vec{w} = (10, -1, 5)$

Ejercicio 2 Estudiar la dependencia o independencia lineal de los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$.

a) $\{(1, 2, -4, 0), (-2, 4, -8, 0), (2, 3, 0, 1)\}$

b) $\{(1, 2, -4, 0), (2, 4, 8, 0), (4, 8, 8, 0)\}$

c) $\{(2, 0, 3, 0), (0, 1, -3, 0), (1, -2, 0, 8)\}$

Ejercicio 3 Dado el siguiente subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$

$$S = \left\{ (x, y, z, t) \quad / \quad \begin{array}{r} x - 2y + t = 0 \\ 3x + 5y + z - t = 0 \\ 5x + y + 3z + t = 0 \end{array} \right\}$$

Determinar:

a) *Dim (S)*

b) Las ecuaciones cartesianas del subespacio

c) Una base del subespacio

d) Las ecuaciones paramétricas del subespacio

Ejercicio 4 Dado el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores,

$$S = L\{(1, 2, -4, 1), (2, 4, -8, 2), (2, 3, 1, 1)\}$$

Determinar:

a) *Dim (S)*

b) Una base del subespacio

c) Las ecuaciones cartesianas del subespacio

Ejercicio 5 Determinar si los siguientes vectores son sistema generador y/o base de $I\!R^3$

a) $\{(3, -1, -1), (1, 0, -2), (0, 4, 3), (2, -1, 1)\}$

b) $\{(1, -2, 1), (4, 1, -1))\}$

c) $\{(2, -1, 0), (4, -1, 5), (0, -1, 2)\}$

d) $\{(1, 0, 4), (2, 1, -3), (1, 1, -7)\}$

Ejercicio 6 Dados los siguientes cuatro vectores de $I\!R^4$, encontrar el máximo número de vectores linealmente independientes: $\{(2,0,1,3),(0,2,-1,2),(2,2,0,-1),(1,3,0,-2)\}$

Ejercicio 7 Sean los siguientes subespacios de $I\!R^3$:

$$S = L\{(2,-1,-1),(3,1,0)\} \text{ y } V = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \quad / \quad x-2y+z=0\}$$

Calcular la dimensión y ecuaciones cartesianas del subespacio S

Ejercicio 8 Calcular la matriz asociada a las siguientes aplicaciones lineales:

a) $f(x,y) = (2x-y,\, 3y,\, x)$

b) $g(x,y,z) = 3x+2y-z$

c) $l(x,y,z,t) = (x+y-z,\, 5t,\, 2y+z,\, 0)$

d) $h(x,y,z) = (3x+2y-z, 6x-y, z-x-y)$

Ejercicio 9 Dada la siguiente aplicación lineal

$$f(x,y,z) = (7x+4y-z, 4x+7y-z, -4x-4y+4z)$$

Comprobar cuál de los siguientes vectores es un autovector de la aplicación y averiguar, en caso afirmativo, su autovalor asociado.

a) $(1,0,4)$

b) $(1,1,8)$

c) $(-2,-2,2)$

d) $(0,-1,6)$

Ejercicio 10 Calcular el polinomio característico y los autovalores de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 11 De las matrices anteriores indicar cuáles son diagonalizables.

Ejercicio 12 Sea $A = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$

a) Comprobar que la matriz es diagonalizable

b) Calcular la matriz diagonal semejante

c) Calcular A^{34} (utilizando la matriz diagonal semejante)

Ejercicio 13 Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Comprobar que la matriz es diagonalizable

b) Calcular la matriz diagonal semejante

c) Calcular A^{20} (utilizando la matriz diagonal semejante)

Ejercicio 14 Sea la siguiente aplicación lineal de $I\!R^3$ a $I\!R^3$

$$f(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$$

Calcular:

a) Calcular los autovalores de la aplicación lineal

b) Calcular una base de cada uno de los subespacios de autovectores asociados a cada autovalor.

c) ¿Es diagonalizable la matriz asociada a la aplicación anterior?